

SIMULADOR DE REDE DE VENTILAÇÃO DE MINA SUBTERRÂNEA COM FORMULAÇÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES

MINE VENTILATION NETWORK SIMULATOR WITH MATRIX FORMULATION OF A SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS

PAULO GUSTAVO CAVALCANTE LINS
Professor, Universidade Federal da Bahia, plins@ufba.br

CLARICE SILVA DOS SANTOS
Graduanda, Universidade Federal da Bahia, ssilvoclarice@gmail.com

JOSEVAN OLIVEIRA DOS SANTOS ROCHA
Graduando, Universidade Federal da Bahia, josevan_oliveira@hotmail.com

ROBSON RIBEIRO LIMA
Professor, Universidade Federal de Pernambuco, robsonlimal@yahoo.com.br

SANDRO LIMA FONTES
Professor, Universidade Federal da Bahia, sandrolfontes@hotmail.com

ROBERTO SANTOS LIMA
Engenheiro de Minas, AngloGold Ashanti: Santa Bárbara – MG, eu_sou_roberto@yahoo.com.br

RESUMO ABSTRACT

A solução de redes de ventilação de minas subterrâneas é usualmente realizada por métodos iterativos. Este trabalho apresenta uma formulação para o problema de ventilação de mina subterrânea onde a contribuição de cada duto de ar é representada por uma matriz do elemento de duto de ar. Um sistema global é montado considerando a contribuição de cada elemento de duto de ar. A não linearidade do problema é tratada pelo método de Newton-Raphson. A implementação realizada possui analogia com o método dos elementos finitos. O simulador implementado foi comparado com um simulador baseado no método de Hardy-Cross. Os resultados foram consistentes. As limitações e futuras ampliações do simulador são discutidas.

Palavras-chave: Rede de Ventilação; Mina Subterrânea; Simulação.

The solution of underground mine ventilation networks is usually performed by iterative methods. This paper presents a formulation for the underground mine ventilation problem where the contribution of each air duct is represented by a matrix of the air duct element. A global system is assembled considering the contribution of each air duct element. The nonlinearity problem is treated by the Newton-Raphson method. The implementation performed is analogous to the finite element method. The simulator implemented was compared with a simulator based on the Hardy-Cross method. The results were consistent. The limitations and future extensions of the simulator are discussed.

Keywords: Ventilation Network; Underground Mine; Simulation.

1 INTRODUÇÃO

A determinação computacional da distribuição de pressões e vazões em uma rede de ventilação de minas subterrâneas realiza-se muitas vezes utilizando o método de Cross (1936). Algumas destas implementações são descritas em Wang & Hartman (1967), Wang & Saperstein (1970) e Wang (1982). A utilização de programação não linear para resolver o mesmo problema é encontrada em Wang (1984). Sereshki et al. (2016) fizeram uma comparação entre diferentes métodos de solução do problema.

Gregory et al. (1976) discutem as analogias na simulação de diferentes sistemas de condução de fluidos. Uma grande similaridade pode ser observada na solução de redes de distribuição de água e redes de ventilação de minas. No presente trabalho o programa de solução de redes de distribuição de água apresentado por Brebbia & Ferrante (1983) foi adaptado para solução de redes de ventilação de minas. O programa implementado utiliza uma formulação matricial e o método de Newton-Raphson.

O simulador de redes de ventilação de minas que utiliza o método de Cross (1936) apresentado em Wang (1982) e implementado por Lins et al. (2008) foi utilizado para gerar resultados que permitiram testar o programa com o método de Newton-Raphson implementado no presente trabalho. Os testes mostraram um bom funcionamento do novo programa.

2 LEI DE ATKINSON

Segundo Hartman et al. (1997) a perda de carga (H_f) em um duto de ar pode ser relacionada com a vazão de ar (Q) no duto, pela conhecida Lei de Atkinson, representada pela expressão:

$$H_f = R \cdot Q^2 \quad (1)$$

A chamada resistência (R) é função do fator de atrito (K) que representa a condição de rugosidade das paredes do duto, do perímetro do duto pelo qual o ar é conduzido (O), do comprimento do duto (L) e da área da seção transversal do duto (A). Utilizando unidades do sistema imperial, K em $\text{lb} \cdot \text{min}^2 / \text{ft}^4$, O e L em ft e A em ft^2 , a expressão para a resistência é dada por:

$$R = \frac{K \cdot O \cdot L}{5,2 \cdot A^3} \quad (2)$$

Utilizando unidades do sistema internacional, K em kg/m^3 , O e L em m e A em m^2 , a expressão para a resistência é dada por:

$$R = \frac{K \cdot O \cdot L}{A^3} \quad (3)$$

Para a implementação realizada no presente trabalho é conveniente escrever a equação (1) na forma:

$$Q = \frac{1}{R^{0,5}} \cdot H_f^{0,5} \quad (4)$$

3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA

Para representar o problema, toma-se uma rede de dutos, conectados por nós. Inicialmente, será esquecido o expoente que existe na equação (4) e será considerada uma relação linear entre vazão e pressão; para calcular a vazão de um duto indicado por i em termos da perda de carga entre dois nós. Uma vazão será positiva quando indo de um nó k para um nó j , quando se tem uma pressão maior no nó k que no nó j .

Para o elemento i , o vetor das vazões nodais, é relacionado com o vetor das pressões nodais por meio de uma matriz de forma:

$$\begin{Bmatrix} Q_k^i \\ Q_j^i \end{Bmatrix} = k^i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_k^i \\ H_j^i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

O somatório das vazões que entram e saem em um nó qualquer deve ser nula. A Figura 1 ilustra o equilíbrio de vazões em um nó 5. Para garantir o equilíbrio de vazões em toda a rede de dutos faz-se necessário montar uma matriz global que relacione o vetor de vazões global $\{Q\}$ com o vetor de pressões global $\{H\}$. Esta matriz global pode

ser chamada de matriz propriedade, ou matriz de condutividade de ar. O problema fica representado por um sistema linear de forma:

$$\{Q\} = [k]\{H\} \quad (6)$$

Para cada duto, pode ser montada uma matriz que represente o elemento, dada por uma equação com forma da equação (5). A montagem desta matriz global pode ser feita colocando a contribuição de cada matriz do elemento na posição apropriada da matriz global. Este processo é ilustrado na Figura 2, onde uma matriz de um elemento que liga o nó n1 ao nó n2 é colocada na matriz global. A Figura 2 representa uma situação genérica em que em cada nó existe um determinado número de graus de liberdade por nó. No presente problema existe apenas um grau de liberdade por nó (que é a pressão).

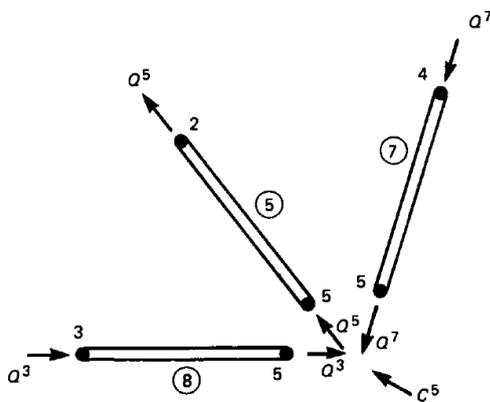


Figura 1. Equilíbrio no nó 5 (BREBBIA & FERRANTE, 1983).

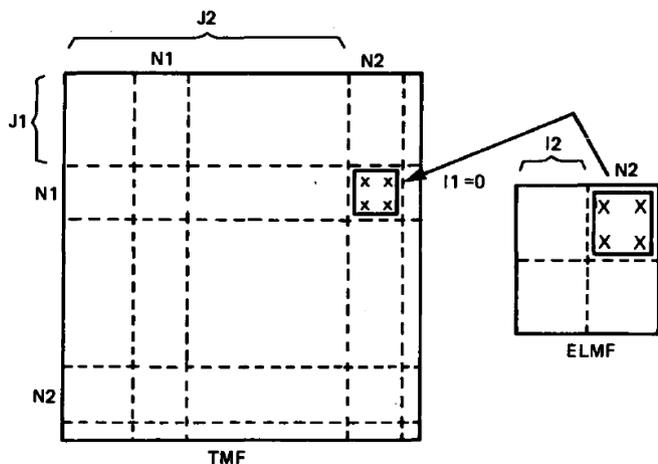


Figura 2. Montagem dos coeficientes dos elementos na matriz global (BREBBIA & FERRANTE, 1983).

4 IMPOSIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

A matriz global representada na equação (6) tem determinante nulo. Para representar um problema de ventilação de mina, é necessário condicionar a matriz para impor no mínimo que um nó possua uma pressão conhecida. No problema de ventilação de mina subterrânea, faz-se necessário representar os pontos de acesso à superfície, e nesses pontos o valor da pressão nodal é zero (pressão atmosférica de referência).

De um ponto de vista numérico, o condicionamento da matriz global pode ser feito colocando o valor unitário na diagonal principal e zerar o resto da linha e o resto da coluna, além de zerar o termo correspondente do vetor de termos independentes. Isto é ilustrado na Figura 3(a).

Uma peculiaridade deste tipo de formulação é que a matriz global é simétrica. Além disso a matriz global tem termos não nulos a uma determinada distância da diagonal principal. Esta distância é chamada de largura de semibanda. Isto é ilustrado na Figura 3(b). A numeração dos nós adotada define a largura de semibanda.

O fato de a matriz global ser simétrica e de banda, permite a adoção de técnicas de armazenamento da matriz global, por exemplo, em semibanda, o que é ilustrado na Figura 3(c). O programa implementado utiliza este tipo de armazenamento da matriz global.

Uma condição de contorno que represente impor uma vazão em um determinado nó é conseguida colocando o valor da vazão de ar no vetor dos termos independentes.

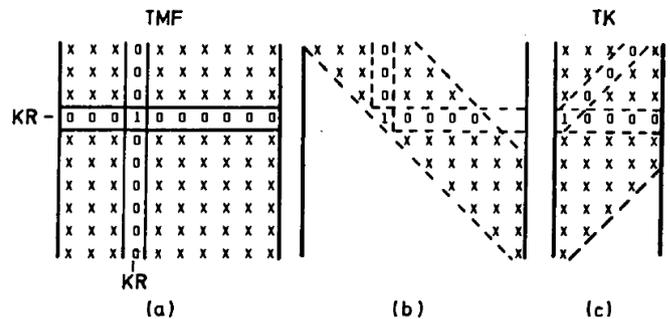


Figura 3. Imposição das condições de contorno (BREBBIA & FERRANTE, 1983).

5 ANÁLISE NÃO LINEAR DA REDE DE VENTILAÇÃO

Adaptando a formulação apresentada em Brebbia & Ferrante (1983), o sistema global de equações que representa o comportamento de uma rede de ventilação, quando a Lei de Atkinson, é utilizada, tem a forma:

$$\mathbf{K} \cdot (\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} = \mathbf{C} \quad (7)$$

Que, pelo fato de a matriz \mathbf{K} depender das incógnitas nodais de pressão, é um sistema não linear.

Brebbia & Ferrante (1983) destacam que muitos diferentes enfoques podem ser utilizados para resolver este tipo de sistema não linear. Um esquema de solução simples para resolver um sistema similar para redes de distribuição de água foi implementado por estes autores. O esquema foi adaptado para resolver o problema da rede de ventilação de mina. Os passos do esquema são:

- Assumir valores iniciais para as pressões nodais.
- Calcular os coeficientes que formam a matriz \mathbf{K} , baseados nos valores correntes das pressões nodais, e formar o sistema de equações.
- Resolver o sistema de equações e obter um novo conjunto de pressões nodais.
- Comparar com o conjunto anterior de pressões nodais; se a diferença for maior que uma tolerância estipulada, repetir as operações começando do passo (b), caso contrário terminar o processo.

Uma descrição gráfica simplificada desta técnica é apresentada na Figura 4, para um sistema com uma pressão nodal H , associada a uma vazão C . Após selecionar um valor inicial para a pressão, H^0 , o valor do coeficiente ligando a pressão e a vazão é computado, para o nível da vazão, sendo mostrada na Figura 4 como k^1 . Conhecendo este coeficiente, e conhecendo o valor de C , um novo valor de pressão, chamado H^1 na Figura 4, pode ser computado. Este valor será, em geral, diferente da solução H , que é a incógnita. Então, o valor aproximado H^1 é usado para computar um novo coeficiente k^2 , e o processo é repetido até que a diferença nas pressões em dois passos sucessivos seja menor que uma dada tolerância. Um limite no

número de iterações pode, também, ser imposto eventualmente (BREBBIA & FERRANTE, 1983).

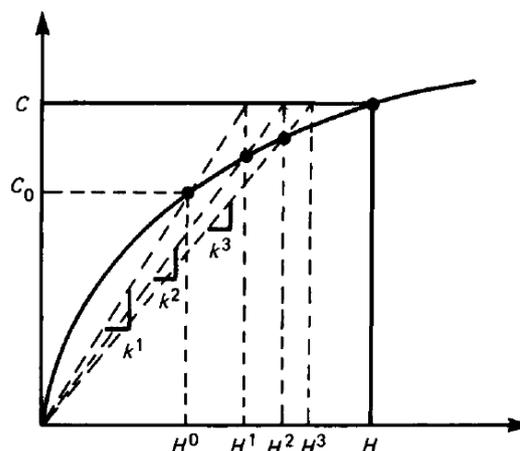


Figura 4. Processo iterativo (BREBBIA & FERRANTE, 1983).

Brebbia & Ferrante (1983) descrevem o esquema computacional implementado como a seguir:

- Inicializar o contador de passos ' i ' e o vetor de pressões \mathbf{H} .
- Computar a matriz \mathbf{K}^i , utilizando as pressões \mathbf{H} .
- Resolver o sistema $\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{C}$.
- Comparar as pressões \mathbf{H} e $\bar{\mathbf{H}}$. Se a diferença for maior que a tolerância, ir para o passo (e), caso contrário ir para o passo (f).
- Incrementar o contador de passos ' i ' de uma unidade e comparar com o número máximo de iterações; se excedido, imprimir um alerta e ir para o passo (f). Senão fazer $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}}$ e ir para o passo (b).
- Calcular as vazões nos elementos de duto e as vazões nodais, imprimir estas variáveis secundárias, e encerrar o programa.

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H}_i)^2 \right]^{1/2}}{\sum_{i=1}^n |\bar{H}_i|} \leq TOL \quad (8)$$

Brebbia & Ferrante (1983) afirmam que para um valor de tolerância aceitável TOL , a convergência é suposta como atingida quando:

Apesar de o esquema apresentado ser de fácil implementação, a convergência pode ser lenta para aplicações práticas. Pode ser conveniente utilizar um método com melhor comportamento de convergência, como o método de Newton-Raphson.

O método de Newton-Raphson é uma técnica frequentemente utilizada para encontrar raízes de equações não lineares e resolver outros problemas não lineares. Resumidamente o método de Newton-Raphson pode ser descrito como a seguir. Suponha-se que se deseje encontrar um valor de x que faça uma função $f(x) \equiv 0$. Este valor será chamado x_o , onde:

$$f(x) \equiv 0 \quad (9)$$

Se for feita uma aproximação para o valor de x , tomando x_k , pode ser expandido:

$$f(x_o) \equiv f(x_k) + \frac{\partial f(x_k)}{\partial x} \delta x \quad (10)$$

Por consequente:

$$\delta x_k = -\frac{f(x_k)}{\partial f(x_k)/\partial x} \quad (11)$$

Desta forma, é possível encontrar um incremento de x para que o novo valor possa ser escrito:

$$x_{k+1} = x_k + \delta x_k \quad (12)$$

Isto é indicado na Figura 5. O processo pode ser repetido até que a solução seja obtida com o grau de acurácia requerido.

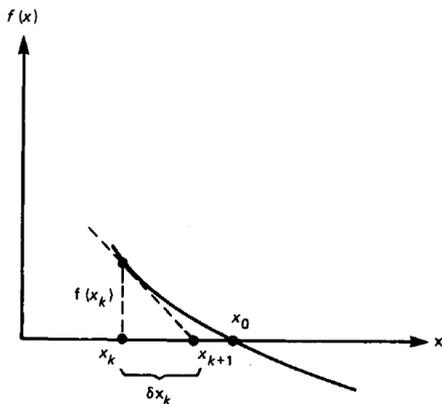


Figura 5. Aproximação para uma raiz de $f(x)=0$ (BREBBIA & FERRANTE, 1983).

Segundo Brebbia & Ferrante (1983) o processo pode ser aplicado em sistemas matriciais como descrito a seguir. Assumindo que após montar todos os elementos de uma rede, se possui um sistema com \mathbf{K} como uma função de \mathbf{H} , isto é:

$$\mathbf{K} \cdot (\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} = \mathbf{C} \quad (13)$$

Para a próxima iteração, pode ser escrita uma função \mathbf{F} de forma que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}) = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{C} = 0 \quad (14)$$

O método de Newton-Raphson apresenta o incremento de \mathbf{H} , isto é, $\delta \mathbf{H}_{k+1}$, como uma função da derivada de $\mathbf{K}(\mathbf{H}_k)$, isto é:

$$\mathbf{F}' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} [\mathbf{K} \cdot (\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H} - \mathbf{C}] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{H}} [\mathbf{K} \cdot (\mathbf{H}) \cdot \mathbf{H}] \quad (15)$$

A matriz \mathbf{F}' pode ser encontrada fazendo as derivadas com relação a \mathbf{H}_i para todos os elementos da coluna 'i' de \mathbf{KH} , e δ representa o incremento na função, o que, leva a uma nova matriz incremental de forma:

$$\begin{Bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Q_k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \cdot \frac{1}{R^{0,5}} \cdot \frac{1}{\Delta H^{0,5}} \\ -1 \quad 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta H_j \\ \delta H_k \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Deve ser feito um registro de que a equação (16) utiliza a derivada da Lei de Atkinson, na forma da equação (4). Esta é a principal diferença do programa implementado no presente trabalho para estudo de redes de ventilação de minas com relação ao programa implementado por Brebbia & Ferrante (1983) para redes de distribuição de água.

Agora é possível escrever:

$$\begin{Bmatrix} \delta Q_j \\ \delta Q_k \end{Bmatrix} = \bar{k}_i \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta H_j \\ \delta H_k \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Montando estas matrizes como anteriormente, se obtém um novo sistema de equações:

$$K_t \cdot \delta H = \delta C \tag{18}$$

Note-se que o vetor δC no lado direito da equação é obtido pela falta de equilíbrio, isto é, encontrando a diferença entre as ações externas e essa que pode ser equilibrada com a solução prévia, isto é:

$$\delta C = C - K(H_k)H_k \tag{19}$$

Geralmente, $\delta C \neq 0$ mas se tornará praticamente zero após poucas iterações. O método de Newton-Raphson geralmente assegura uma convergência rápida. Uma discussão detalhada do método pode ser encontrada em Brebbia & Ferrante (1983).

6 IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

O programa implementado no presente trabalho foi denominado VentoNL. A implementação foi feita em linguagem Fortran. O simulador foi desenvolvido por meio do simulador de redes de água de Brebbia & Ferrante (1983).

Na implementação os pontos nodais passaram a ter coordenadas cartesianas em três dimensões. Rotinas adicionais permitem ao programa a geração de um arquivo de intercâmbio de desenhos do AutoCAD (dxf). Com este procedimento

é possível visualizar a rede de ventilação em três dimensões no AutoCAD ou em outro programa que suporte o formato dxf.

7 TESTE DO PROGRAMA

O programa VentoNL foi testado com uma rede hipotética. Nesta rede os pontos nodais 1 e 8 representam os pontos de acesso à a superfície em uma mina subterrânea, onde a pressão destes nós é zero (pressão atmosférica). A mesma rede foi modelada com o programa Vento2007, cuja implementação é descrita em Lins et al. (2008). A principal diferença na modelagem é que o ventilador no programa VentoNL é representado por uma carga nodal no ponto nodal 6. No programa Vento2007, a ação do ventilador é representada no ramal que liga os pontos nodais 6 a 8.

A Figura 6 apresenta as vazões nos ramais calculadas pelo programa VentoNL e a Figura 7, as vazões calculadas pelo programa Vento2007. Os valores de vazões calculados pelos dois programas são muito próximos. A única diferença está no ramal que ligas os pontos nodais 6 e 8, o que se deve à forma de consideração da carga do ventilador.

Os resultados dos cálculos das cargas nodais pelos programas VentoNL e Vento2007 são apresentados na Tabela 1. As diferenças nos resultados são coerentes com as tolerâncias impostas em cada programa.

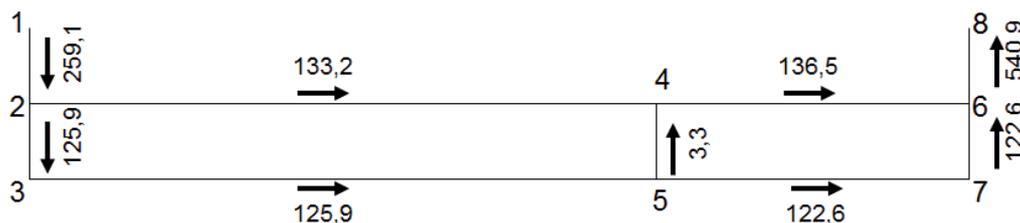


Figura 6. Vazões nos ramais calculadas pelo programa VentoNL, método de Newton-Raphson.

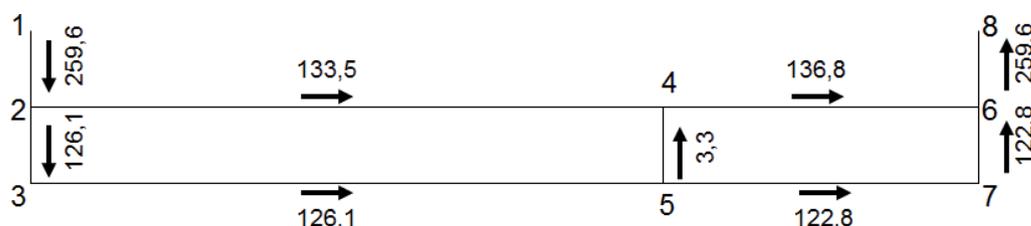


Figura 7. Vazões nos ramais calculadas pelo programa Vento2007, método de Cross (1936).

Tabela 1. Cargas nodais calculadas pelos programas Vento2007 e VentoNL.

Ponto Nodal	Método de Newton-Raphson Programa VentoNL	Método de Cross (1936) Programa Vento2007
1	0,0000	0,000
2	1,4869	1,493
3	1,8378	1,845
4	4,7627	4,781
5	4,7624	4,781
6	6,4823	6,507
7	6,1494	6,173
8	0,0000	0,000

8 CONCLUSÕES

Um simulador computacional de redes de ventilação de minas foi implementado e testado com sucesso. O simulador utiliza uma representação matricial do problema similar à estrutura de programas de elementos finitos. A não linearidade do problema foi resolvida utilizando o método de Newton-Raphson. Diversas melhorias podem ser implementadas no programa. A primeira é a representação da curva característica do ventilador. Na presente versão, o ventilador é representado por uma vazão fixa.

Durante os testes, detectaram-se diversos problemas com relação à convergência do método implementado, para alguns casos o programa não converge para a solução de referência do programa do método de Cross (1936). Estes problemas de convergência devem ser estudados com mais detalhes.

Para representação de redes de ventilação de minas reais, com grande quantidade de ramais, faz-se necessária a criação de uma interface gráfica para visualização dos resultados. O uso de OpenGL pode ser um caminho para a implementação da interface.

REFERÊNCIAS

BREBBIA, C.A. & FERRANTE, A.J. (1983) *Computational Hydraulics*. Butterworths, London. 290p.

CROSS, H. (1936) *Analysis of flow in networks of conduits or conductors*. Bulletin 286, Engineering Experiment Station, University of Illinois. 32p.

GREGORY, W.S.; DUERRE, K.H. & BENNETT, G.A. (1976) *Ventilation systems analysis during tornado conditions*. Los Alamos scientific laboratory of the University of California, Technical Report LA-6293-PR. 19p.

HARTMAN, H.L.; MUTMANSKY, J.M.; RAMANI, R.V. & WANG, Y.J. (1997) *Mine ventilation and*

air conditioning. Third Edition. John Wiley & Sons, New York. 730p.

LINS, P.G.C.; ANDRADE JÚNIOR, F.S.; COSTA, J.M. & BOMFIM, T.S.B. (2008) Implementação

Multiplataforma de um Simulador Computacional de Redes de Ventilação de Mina. In 12º Congresso Brasileiro de Geologia de Engenharia e Ambiental, 2008, Porto de Galinhas, PE.

SERESHKI, F.; SAFFARI, A. & ELAHI, E. (2016) Comparison of mathematical approximation methods for mine ventilation network analysis. In *International Journal of Mining Science*, Vol. 2, No. 1, p.1-14.

WANG, Y. J. (1982) APPENDIX C - A Computer Program for Mine Ventilation Network Analysis. In: HARTMAN, H.L., et al. (eds.) *Mine Ventilation and Air Conditioning*. Second Edition. John Wiley & Sons, New York. P.751-771.

WANG, Y.J. & HARTMAN, H.L. (1967) Computer solution of three-dimensional mine ventilation networks with multiple fans and natural ventilation. In *International Journal of Rock*

Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Vol. 4, No. 2, p.129-154.

WANG, Y.J. & SAPERSTEIN, L.W. (1970) *Computer-aided solution of complex ventilation networks*. In *Trans. SME-AIME*, vol. 247, p.238-250.

WANG, Y.J. (1984) *A Non-linear Programming Formulation for Mine Ventilation Networks with Natural Splitting*. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Vol. 21, No. 1, p.43-45.